1	2	3	4	Nota
B-	B	R-	B	7,50

Apellido y Nombre: FILIPPO AGUSTINA N° de libreta:

Carrera: LIC. EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Turno: 9 a 14hs. A-K ☐ 9 a 14hs. L-Z ☐ 14 a 19hs. ☐ 17 a 22hs. ☒

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2024 - Segundo Recuperatorio del **Segundo** parcial - 19/07/2024

Ejercicio 1. Sea $b \in \mathbb{Z}$ tal que $(b^{163} + 18^{2100} + 54 : 616) = 77$. Calcular el resto de dividir a b por 154.

Ejercicio 2. Sean $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ y $\omega = e^{\frac{3}{38}\pi i}$.
Determinar todos los $m \in \mathbb{Z}$ tales que

$$z^{10m} = \omega^{4m+8}.$$

Ejercicio 3. Sean $f = X^5 + X^3 + X$ y $g = X^5 + X^4 + X^2 + X \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.
Calcular $(f : g)$ y dar su factorización como producto de polinomios irreducibles mónicos en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.

Ejercicio 4. Hallar todos los $a \in \mathbb{Q}$ tales que

$$f = 3X^4 + (-4a+1)X^3 - (a+1)X^2 - 3X + 11a^2$$

tiene a a como raíz doble. Para el o los valores de a hallados, factorizar f en producto de irreducibles mónicos en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

① $(b^{163}+18^{2100}+54 : 616)=77$.

Escribiendo 616 y 77 como producto de factores primos tenemos que

$616=2^3\cdot 7\cdot 11$. ✓

$77=7\cdot 11$ ✓

De esta forma

$$(b^{163}+18^{2100}+54:616)=77 \Leftrightarrow \begin{cases} 7\mid b^{163}+18^{2100}+54 \ (1) \\ 11\mid b^{163}+18^{2100}+54 \ (2) \\ 2\nmid b^{163}+18^{2100}+54 \ (3) \end{cases}$$ ✓

(1) $7\mid b^{163}+18^{2100}+54$.

$\Leftrightarrow b^{163}+\underbrace{18}_{\equiv 4(7)}{}^{2100}+\underbrace{54}_{\equiv 5(7)}\equiv 0(7)$

$\Leftrightarrow b^{163}+4^{2100}+5\equiv 0(7)$

$\Leftrightarrow b^{163}+(\underbrace{4^3}_{=64\equiv 1(7)})^{700}+5\equiv 0(7)$

$\Leftrightarrow b^{163}+1+5\equiv 0(7)$

$\Leftrightarrow b^{163}+6\equiv 0(7)$

$\Leftrightarrow b^{163}\equiv -6(7)$

$\Leftrightarrow b^{163}\equiv 1(7)$

Si $7\mid b \Rightarrow b^{163}\equiv 0\not\equiv 1(7)$

Si $7\nmid b \Rightarrow$ como $(7:b)=1$ y 7 primo, uso el PTF.

$\Leftrightarrow b^{r_6(163)}\equiv 1(7)$ ✓

$\Leftrightarrow b\equiv 1(7)$

$\Rightarrow 7$ divide cuando $\underline{b\equiv 1(7)}$ ✓

(2) $11\mid b^{163}+18^{2100}+54$

$\Leftrightarrow b^{163}+\underbrace{18}_{\equiv 7(11)}{}^{2100}+\underbrace{54}_{\equiv 10(11)}\equiv 0(11)$

$\Leftrightarrow b^{163}+7^{2100}+10\equiv 0(11)$

Como $(7:11)=1$ y 11 primo, uso el PTF.

$\Leftrightarrow b^{163}+7^{r_6(2100)}+10\equiv 0(11)$ $\quad 7^{r_{10}(2100)}$

$\iff b^{163} + 7^0 + 10 \equiv 0(11)$

$\iff b^{163} + \underbrace{11}_{\equiv 0(11)} \equiv 0(11)$ ✓

$\iff b^{163} \equiv 0(11)$ ✓

Si $11 | b \Rightarrow b^{163} \equiv 0(11) \iff \underline{b \equiv 0(11)}$ (pues $11|b$)

Si $11 \nmid b \Rightarrow$ como $(b:11)=1$ y 11 primo, uso el PTF.

$\iff b^{r_{10}(163)} \equiv 0(11)$

$\iff \underline{b^3 \equiv 0(11)}$

↓

Es un absurdo, ya que para que $b^3 \equiv 0(11)$, entonces $11|b$, pero dijimos que $11 \nmid b$.

$\Rightarrow 11$ divide cuando $b \equiv 0(11)$ ✓

(3) Veo cuando sucede.

$2 | b^{163} + 18^{2100} + 54$

$\iff b^{163} + \underbrace{18}_{\equiv 0(2)}{}^{2100} + \underbrace{54}_{\equiv 0(2)} \equiv 0(2)$

$\iff b^{163} \equiv 0(2)$

Hago tabla de restos mod 2.

b	0	1
b^{163}	0	1

✓

$\Rightarrow 2$ divide cuando $b \equiv 0(2)$, pero como no quiero que divida, me quedo con $\underline{b \equiv 1(2)}$ ✓

Juntando todo:

$$\begin{cases} b \equiv 1(7) \\ b \equiv 1(2) \\ b \equiv 0(11) \end{cases} \checkmark \underset{7 \perp 2}{\iff} \begin{cases} b \equiv 1(14) \\ b \equiv 0(11) \end{cases} \checkmark$$

Como $14 \perp 11$ por TChR $\exists!$ solución módulo $14 \cdot 11 = 154$.

Entonces

$b = 11k \equiv 1(14) \underset{5 \perp 14}{\iff} 5 \cdot 11k \equiv 5 \cdot 1 (14)$

$\Longleftrightarrow 55k \equiv 5 \ (14)$

$\equiv -1 \ (14)$

$\Longleftrightarrow -k \equiv 5 \ (14)$

$\Longleftrightarrow k \equiv -5 \ (14)$

$\Longleftrightarrow k \equiv 9 \ (14)$

$\Longleftrightarrow k = 14q + 9$.

$\Rightarrow b = 11k = 11(14q + 9) =$

$= 154q + 99$.

$\Longleftrightarrow b \equiv 99 \ (154)$

Entonces, $\boxed{r_{154}(b) = 99}$

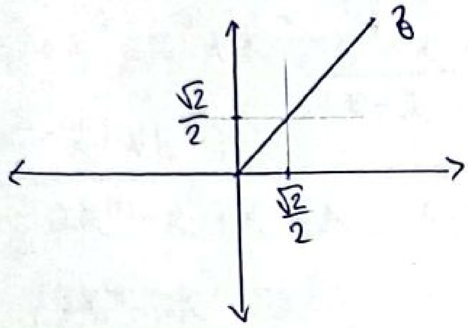
B⁻

② Tenemos por un lado:

$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i.$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$ ✓

$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ ✓



Por otro lado:

$w = e^{\frac{3\pi}{38} i}$

$|w| = \sqrt{\left(\cos\left(\frac{3}{38}\right)\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\left(\frac{3}{38}\right)\right)^2} = 1.$ ✓

$\arg(w) = \frac{3\pi}{38}.$ ✓

Luego:

$z^{10m} = w^{4m+8}.$

$z^{10m} = w^{4m} \cdot w^{8}.$

Para que dos números sean iguales, también deben serlo sus módulos y argumentos.

Así:

$z^{10m} = w^{4m+8}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} |z^{10m}| = |w^{4m+8}| \ (1) \\ \arg(z^{10m}) = \arg(w^{4m+8}) \ (2) \end{cases}$ ✓

(1) $|z^{10m}| = |w^{4m+8}|$

$|z^{10m}| = |w^{4m}||w^{8}|$

$|z|^{10m} = |w|^{4m} \cdot |w|^{8}$.

$1^{10m} = 1^{4m} \cdot 1^{8}$.

$1 = 1$.

Podemos ver que sus módulos son iguales.

(2) $\arg(z^{10m}) = \arg(w^{4m+8})$.

$(10m)\arg(z) = (4m+8)\arg(w) + 2k\pi$.

$10m \cdot \frac{\cancel{\pi}}{4} = (4m+8)\frac{3\cancel{\pi}}{38} + 2k\cancel{\pi}$

$10m \cdot \frac{1}{4} = (4m+8) \cdot \frac{3}{38} + 2k$.

$\frac{5m}{2} = \frac{6m}{19} + \frac{12}{19} + 2k$.

$\frac{5m}{2} - 2k = \frac{6m+12}{19}$

$\left(\frac{5m}{2} - 2k\right)19 = 6m + 12$

$\frac{95m}{2} - 38k = 6m + 12$

$\frac{95m}{2} - 6m = 12 + 38k$.

$\frac{83m}{2} = 12 + 38k$.

$83m = (12 + 38k)2$.

$83m = 24 + 76k$.

$\Leftrightarrow 83m \equiv 24(76) \Leftrightarrow 7m \equiv 24(76) \underset{11 \perp 76}{\Leftrightarrow} 11 \cdot 7m \equiv 11 \cdot 24(76) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 77m \equiv 264(76) \Leftrightarrow m \equiv 36(76)$

Todos los $m \in \mathbb{Z}$ que cumplen con lo pedido son aquellos

$\boxed{m \equiv 36(76)}$ B

(3) Calculo el mcd entre f y g mediante el Algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^3+x & x^5+x^4+x^2+x \\ \hline -(x^5+x^4+x^2+x) & 1 \\ \hline \quad -x^4+x^3-x^2 & \end{array}$$

Ahora, divido g por el resto de la división anterior.

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4+x^2+x & -x^4+x^3-x^2 \\ \hline -(x^5-x^4+x^3) & -x-2 \\ \hline \quad 2x^4-x^3+x^2+x & \\ -(2x^4-2x^3+2x^2) & \\ \hline \quad x^3-x^2+x & \end{array}$$

ojo $\bar{2}x^4=\bar{0}x^4$ Resto $= -x^3+x^2+x$

Vuelvo a dividir por el resto.

$$\begin{array}{l|l} -x^4+x^3-x^2 & x^3-x^2+x \\ \hline -(-x^4+x^3-x^2) & -x \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

Como el resto es 0, termino el algoritmo.
El último resto no nulo dividido por su coeficiente principal es el mcd entre f y g.

$\boxed{(f:g)=x^3-x^2+x}$

Llamo $h=x^3-x^2+x = \underbrace{x}_{\text{tiene raíz}=0}\underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{lo llamo } r}$

Busco las raíces de r con la resolvente.

$a_1, a_2 = \dfrac{1+w}{2}$ con $w^2=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3$.

$w=\sqrt{-3}$

$w=\pm\sqrt{3}\,i$

R⁻

$a_1=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$④\ f=3x^4+(-4a+1)x^3-(a+1)x^2-3x+11a^2$$
$$=3x^4-4ax^3+x^3-ax^2-x^2-3x+11a^2$$

Para que a sea raíz doble $\iff f(a)=0 \wedge f'(a)=0 \wedge f''(a)\neq 0$

$$f(a)=3a^4-4a\,a^3+a^3-a\cdot a^2-a^2-3a+11a^2$$
$$=3a^4-4a^4+\cancel{a^3}-\cancel{a^3}-a^2-3a+11a^2$$
$$=-a^4+10a^2-3a$$

Llamo $g=-x^4+10x^2-3x$

$$f'=12x^3-12ax^2+3x^2-2ax-2x-3$$
$$f'(a)=12a^3-12a\,a^2+3a^2-2a\cdot a-2a-3$$
$$=\cancel{12a^3}-\cancel{12a^3}+3a^2-2a^2-2a-3$$
$$=a^2-2a-3=0$$

$\downarrow$ qq (pues quiero encontrar sus raíces).

Busco los a tales que $f'(a)=0$ con la resolvente.

$a_1,a_2=\dfrac{2+w}{2}$ con $w^2=(-2)^2-4\cdot 1(-3)=16$

$w=\sqrt{16}$

$w=\pm 4$

$a_1=\dfrac{2+4}{2}=3\in\mathbb{Q}$ ✓

$a_2=\dfrac{2-4}{2}=-1\in\mathbb{Q}$ ✓

Evalúo ~~cada valor~~ g en cada valor de a hallado para ver si, a su vez, son raíces de f.

$g(3)=-3^4+10\cdot 3^2-3\cdot 3=0$ ✓

$g(-1)=-(-1)^4+10(-1)^2-3(-1)=12\neq 0$ ✓

Entonces, el único valor de a tal que a es raíz doble de f es $\boxed{a=3}$ ✓

$$\rightarrow f=3x^4+(-4\cdot 3+1)x^3-(3+1)x^2-3x+11\cdot 3^2$$
$$=3x^4-11x^3-4x^2-3x+99$$

Sabemos que 3 es raíz doble

$\Rightarrow \underbrace{(x-3)^2} | f$ ✓

$= x^2 + 2x(-3) + (-3)^2 = x^2 - 6x + 9$.

Hago la división

$$\begin{array}{l|l} 3x^4 - 11x^3 - 4x^2 - 3x + 99 & x^2 - 6x + 9 \\ \hline -(3x^4 - 18x^3 + 27x^2) & 3x^2 + 7x + 11 \\ \quad 7x^3 - 31x^2 - 3x + 99 & \\ \quad -(7x^3 - 42x^2 + 63x) & \\ \qquad 11x^2 - 66x + 99 & \\ \qquad -(11x^2 - 66x + 99) & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow f = (x^2 - 6x + 9)\underbrace{(3x^2 + 7x + 11)}_{\text{lo llamo } h}$.

Busco las raíces de h con la resolvente.

$a_1, a_2 = \frac{-7 + w}{2 \cdot 3}$ con $w^2 = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = -83$

$w^2 = -83$ ⊛

$a_1, a_2 = \frac{-7 + w}{6}$

⊛ $w^2 = -83 \iff \begin{cases} |w^2| = |-83| & (1) \\ \arg(w^2) = \arg(-83) & (2) \end{cases}$

(1) $|w|^2 = 83$

$|w| = \sqrt{83}$.

(2) $2 \cdot \arg(w) = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

$\arg(w) = \frac{\pi + 2k\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Veo qué valores puede tomar k.

$0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi < 2\pi$

$0 \leq \frac{1}{2} + k < 2$.

$-\frac{1}{2} = -0{,}5 \leq k < \frac{3}{2} = 1{,}5.$

$\Rightarrow k \in \{0;1\}.$

Luego, $z_k = \sqrt{83}\, e^{\frac{\pi}{2} + k\pi i}$

$z_0 = \sqrt{83}\, e^{\frac{\pi}{2} i} = \sqrt{83}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{83}\, i$

$z_1 = \sqrt{83}\, e^{\frac{3\pi}{2} i} = \sqrt{83}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -\sqrt{83}\, i$

Luego:

$a_1 = \frac{-7 + \sqrt{83}\, i}{6}$ y $a_2 = \frac{-7 - \sqrt{83}\, i}{6}.$

$\Rightarrow h = 3\left(x - \left(\frac{-7 + \sqrt{83}\, i}{6}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-7 - \sqrt{83}\, i}{6}\right)\right)$

Ahora, hago mónico a h para la factorización en $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$.

$\frac{1}{3} h = \frac{1}{3}\left(3x^2 + 7x + 11\right) = x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{11}{3}.$

Factorización en irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$.

$f = 3\underbrace{(x-3)^2}_{\text{irred. al ser de grado 1}} \underbrace{\left(x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{11}{3}\right)}_{\text{irreducible al ser de grado 2 sin raíces en } \mathbb{Q}[x] \text{ ni } \mathbb{R}[x].}$

Factorización en irreducibles en $\mathbb{C}[x]$:

$f = 3\underbrace{(x-3)^2 \left(x - \left(\frac{-7 + \sqrt{83}\, i}{6}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-7 - \sqrt{83}\, i}{6}\right)\right)}_{\text{irreducibles al ser de grado 1.}}$

B